Согласован:
Директор ГБОУ СОШ пос. Сокский
_________________ Л.И. Аникина
«_____»__________2016

ПЛАН-КОНСПЕКТ УРОКА

Тема урока: «Производная»

Дата проведения: *30 января 2016 года*

Ф.И.О: *Яковлева Нина Васильевна*

Место проведения: *ГБОУ СОШ пос. Сокский м.р. Исаклинский Самарской области*

Уровень: *школьный*

Предмет, класс: *алгебра и начало анализа, 10 класс*

Тема урока: «Производная»*.*

Учебник: *Алгебра и начало анализа. 10-11 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений А. Н.Холмогоров и др., М.:2013*

Тема урока: «Производная»

Цели:

1. Образовательные.

- Планируется, что к концу урока ученики будут знать, что такое производная и уметь использовать это понятие.

2. Развивающие.

- создать условия для развития внимательности, наблюдательности и умение выделять главное.

3. Воспитательные.

- содействовать развитию у учащихся чувства ответственности за личную и коллективную деятельность
- создать условия, обеспечивающие воспитания внимательности.

Тип урока: урок введения нового понятия.

Ход урока.

Учитель. Изучая математику, мы то и дело вводим в рассмотрение различные новые понятия. Откуда они берутся? Как возникли, например, такие понятия, как «прямая», «цилиндр», «число», «множество», «функция» и многие другие?

Человек вглядывается в окружающий мир и начинает подмечать в разном (предметах, явлениях) что-то общее. Проанализировав, стремится описать «это общее», его формализовать, другими словами — построить его математическую модель.

Что свойственно траектории светового луча, направлению человеческого взгляда и натянутой нити? Прямизна! Отсюда и понятие — «прямая».

Что свойственно карандашам в коробке, страницам в книге и рыбам в косяке? Множественность! Отсюда понятие «множество».

За более простыми понятиями приходят более сложные (вспомните схему построения любой теории, в частности геометрии: первичные понятия (ПП) → аксиомы (правила игры с ПП) → новые понятия и т.д.

За каждым новым понятием стоит человек, и подчас не один. Так получилось и с понятием «производная функции»: И. Ньютон и Г. Лейбниц на рубеже XVII— XVIII веков, идя разными путями, практически одновременно ввели понятие производной. По-разному ее описали и назвали, а потом яростно оспаривали друг у друга право первооткрывателя. На описание этого понятия на принятом сегодня языке, языке бесконечно малых, ушло еще два века. Среди тех, кто это сделал, есть и ученый, учитель Софьи Ковалевской — Карл Вейерштрасс. Но это уже — другая история.

Сегодня мы с вами тоже попытаемся стать первооткрывателями.

Задачи и их решение

Учитель. Разберем вначале три задачи из разных областей знания: геометрии, физики и химии.

Задача 1. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Учитель. Вы уже сталкивались с понятием касательной в курсе планиметрии. Скажите, как вы понимаете: что такое касательная?

Ученики. Касательная — это прямая, которая имеет одну общую точку с окружностью.

Учитель. Хорошо. А если мы возьмем параболу $y = x^2$ (рис. 1), то в ее вершине оси координат имеют с ней только одну общую точку. Какая из них будет касательной к параболе?

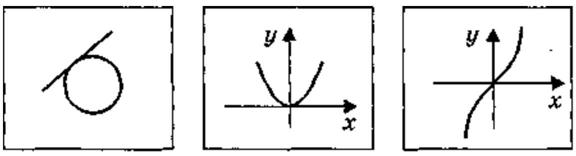

Рис. 1

Ученики. Конечно ось *Ox*. *А* ось *Oy* пересекает параболу.

Учитель. Значит, по вашему мнению, касательная не может пересекать линию. А как вы думаете: чем будет являться ось *Ox* для кубической параболы $y = x^3$, касательной или секущей?

Ученики. ??? Вроде бы секущая, но что-то в ней есть и от касательной.

Учитель. Значит, пока у нас нет четкого представления о касательной. Давайте посмотрим, как математики определили понятие касательной.

В точке M_0 проведем касательную к кривой так, как мы ее сейчас понимаем, и секущую M_0M_1 (рис. 2). Будем сдвигать точку M_1 по кривой, приближаясь к точке M_0, тогда секущая будет поворачиваться вокруг точки M_0 и стремиться к касательной. Теперь проведем другую секущую — M_0M_2. Приближая точку M_2 по кривой к точке M_0 с другой стороны, мы увидим, что и эта секущая, поворачиваясь вокруг точки M_0, будет стремиться занять положение касательной. Одна секущая слева, другая справа... Не напоминает ли это вам что-нибудь знакомое?

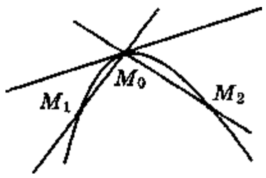

Рис.2

Ученики. Предел!

Учитель. Верно! Равенство левого и правого пределов говорит о том, что предел в точке существует.

И математики, вводя определение касательной, руководствовались тем же предельным переходом.

Какое бы определение вы теперь дали касательной?

(Ученики вместе с учителем формулируют определение касательной.)

Определение. Касательной к непрерывной кривой в ее точке M_0 (точка касания) называется предельное положение секущей M_0M, проходящей через точку M_0, когда точка M неограниченно приближается по кривой к точке M_0.

Учитель. Ну вот мы попутно ввели еще два новых понятия: «касательная» и «точка касания»! А вы не забыли, для чего мы это делали?

Ученики. Мы хотим решить задачу о касательной.

Учитель. Точнее, об угловом коэффициенте касательной! А что это за коэффициент?

Ученики. Так ведь касательная — это прямая, а у прямой, если она не перпендикулярна к оси *Ox*, есть угловой коэффициент.

Учитель. Верно. Но что же это такое?

Ученики. Угловой коэффициент — это тангенс угла наклона прямой к оси *Ox*.

Учитель. Правильно. Вот теперь мы готовы решать нашу задачу.

(Далее учитель записывает решение первой задачи, оставляя место для записи решений второй и третьей задач. Причем делает это так, чтобы одни и те же шаги алгоритма расположились рядом — на одних горизонталях.)

Итак, нам дан график функции $y = f(x)$ и точка M_0 с абсциссой x_0. Проведем через эту точку касательную TM_0 и секущую M_1M_0. Углы наклона к оси *Ox* касательной обозначим α, а секущей — φ и выполним дополнительные построения *(рис. 3)*.

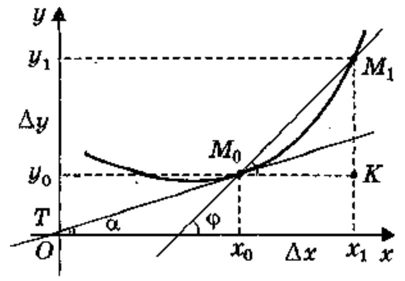

Рис. 3

Переходя от точки M_0 к точке M_1, мы меняем абсциссу точки графика функции с x_0 на x_1 и наоборот. Математики говорят, что мы даем значению x_0 приращение Δx и получаем $x_1 = x_0 + \Delta x$. Соответствующие точкам x_0 и x_1 значения функции будут $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$. Принято говорить так: когда абсциссе x_0 мы даем приращение $\Delta x = x_1 - x_0$, то функция получает приращение $\Delta y = y_1 - y_0$ Угловой коэффициент секущей находится из треугольника M_0M_1K:

$$k\text{сек} = tg\varphi = \frac{M_1\,K}{M_0\,K} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

А теперь будем сдвигать по кривой точку M_1 в сторону точки M_0 . Видим, что:
1) $M_1 \to M_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$;
2) $M_1 \to M_0 \Rightarrow \varphi \to \alpha \Rightarrow tg\varphi \to tg\alpha \Rightarrow k_{сек} \to k_{кас}$.
Таким образом,

$$k_{кас} = \lim_{M_1 \to M_0} k_{сек} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Задача решена.

Задача 2. Зная закон движения точки по прямой, найти скорость движущейся точки для любого момента времени.
Пусть закон движения задан формулой $s = s(t)$, где s — расстояние, пройденное точкой, отсчитываемое от некоторого ее начального положения — точки O, а t — время движения. Найдем скорость точки в момент времени t_0, то есть мгновенную скорость в этот момент времени.
Пусть к моменту времени t_0 точка находилась на расстоянии s_0 от точки O — начала движения (рис. 4), а в некоторый следующий момент времени t_1 оказалась на расстоянии s_1. Какое время точка находилась в пути?

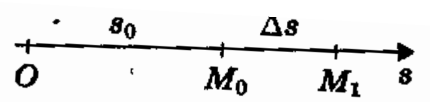

Рис. 4

Ученики. $t_1 - t_0 = \Delta t$.
Учитель. Какое расстояние она прошла за это время?
Ученики. $s_1 - s_0 = \Delta s$.

Учитель. А с какой средней скоростью она двигалась на отрезке M_0M_1?
Ученики. $V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Учитель. Подчеркнем, что движение точки не обязательно равномерное (то есть ее скорость меняется от точки к точке). Очевидно, что средняя скорость точки на наблюдаемом промежутке отличается от ее скорости в момент времени t_0. Но если мы будем уменьшать промежуток наблюдения, что будет происходить?
Ученики. Значения средней скорости будут все меньше отличаться от истинной скорости движения в момент t_0!
Учитель. А тогда как можно связать среднюю скорость движения точки на промежутке с мгновенной скоростью в точке M_0?
Ученики.

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Учитель. Таким образом, мы решили поставленную задачу. Посмотрите на решение этих двух задач: вы ничего не заметили?
Ученики. Их решение свелось к вычислению одинаковых пределов.
Учитель. Верно! И что удивительно: быстрота протекания физических, химических, биологических и других процессов также описывается при помощи аналогичных пределов.

Задача 3. Пусть масса вещества, образующегося в результате химической реакции (или в процессе размножения), изменяется по закону $m = m(t)$ и нужно определить быстроту (скорость) его образования (размножения) в момент времени t_0.

Как бы вы решили такую задачу?
Ученики:
— Проследили бы за ходом процесса некоторое время Δt.
— Определили бы изменение массы за это время:
$\Delta m = m(t_0 + \Delta t) — m(t_0)$.
— Нашли бы среднюю скорость образования вещества

$V_{ср} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$
а потом мгновенную:

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Введение нового понятия

Учитель. Надеюсь, вы поняли ход наших рассуждений. А теперь давайте абстрагируемся от конкретности наших задач и запишем то общее, что мы увидели.
1. Имеется функция $y = f(x)$ и некоторая точка x. Функция определена в этой точке и некоторой ее окрестности.
2. Даем аргументу x приращение Δx и находим соответствующее приращение

функции:
$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$
3. Находим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

4. Вычисляем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитель. Поскольку полученный предел — часто повторяющийся объект (!), то он представляет большой интерес для математиков. А это значит, что теперь надо:
а) назвать его — присвоить термин;
б) ввести для него краткое обозначение;
в) изучить его свойства;
г) научиться его вычислять;
д) научиться применять к решению задач (иначе зачем он нам нужен?!).

Определение. Предел отношения приращения функции в данной точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется производной функции в данной точке.
Встречаются различные обозначения производной:
$y' \equiv f'(x) \equiv y'_x \equiv f'_x \equiv \frac{dy}{dx}$

Мы чаще будем использовать первые два обозначения. Теперь можно записать определение производной в математических символах:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

В каждой конкретной точке производная — число. Проводя рассуждения для произвольной точки x, мы получаем выражение, зависящее от *x* (новую функцию!). Операцию нахождения производной называют дифференцированием. Это новая операция, которую можно производить над функциями, знак «'» — символ операции, такой же как « + » для сложения или «:» для деления.
Первичное закрепление
(Учитель записывает на доске решения приме-ров, ученики говорят ему, что нужно писать.)

Пример 1. Продифференцировать функцию

$$y = x^2 - 3x + 4.$$

Решение. **1)** $f(x) = x^2 - 3x + 4,$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4;$$

2) $f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$= (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4 - (x^2 - 3x + 4) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 4 - x^2 + 3x - 4 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x;$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 3;$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 3) = 2x + 0 - 3 = 2x - 3.$

Таким образом,

$$y' = (x^2 - 3x + 4)' = 2x - 3.$$

Пример 2. Найти $f'(3)$, если $f(x) = \sqrt{3x - 5}$.

Решение.

1) $f(x) = \sqrt{3x - 5}, \quad f(x + \Delta x) = \sqrt{3(x + \Delta x) - 5};$

2) $f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{3(x + \Delta x) - 5} - \sqrt{3x - 5};$

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{3(x + \Delta x) - 5} - \sqrt{3x - 5}}{\Delta x} = \dfrac{\left(\sqrt{3(x + \Delta x) - 5}\right)^2 - \left(\sqrt{3x - 5}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{3(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{3x - 5}\right)} =$

$$= \frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{3x - 5}\right)} = \frac{3}{\sqrt{3(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{3x - 5}};$$

4) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{3x - 5}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 5}}.$

Итак,

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x - 5}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}, \quad f'(3) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 3 - 5}} = \frac{3}{4}.$$

Обратим внимание:

—что найти производную функции — это значит ее продифференцировать, а продифференцировать функцию — это значит найти ее производную;

— в результате операции дифференцирования функции получается новая функция;

— дифференцируемая функция на некотором промежутке — это функция, имеющая производную в каждой точке этого промежутка.

Так вычисляется производная. Какие есть вопросы?

Ученики. И что, производная всегда находится так сложно?

Учитель. Для того чтобы ответить на этот вопрос, нам нужно поближе познакомиться с производной — этим новым математическим объектом, чем мы и

займемся на следующих уроках. А сейчас давайте вернемся к нашим задачам.
Производная есть единая математическая модель различных задач, которая допускает различные толкования (интерпретации)!
Так, с точки зрения физики (задача 2): $s'(t) = V_{МГН}(t)$ — производная от пути по времени — это мгновенная скорость прямолинейного движения в момент времени t (механический смысл производной).
С точки зрения геометрии (задача 1): $f'(x) = k_{кас}(x)$ — производная функции — это угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x (геометрический смысл производной).
Обратим внимание, что производную можно истолковать и как быстроту изменения функции (значений *y* при изменении значений *x*)! То есть с функциональной точки зрения производная — мгновенная скорость изменения значений функции.
Последняя интерпретация говорит нам о том, что при помощи производной мы в дальнейшем сможем исследовать функцию на монотонность и, возможно, определять и другие ее свойства. И то, что это будет так, мы убедимся в дальнейшем.

Итог

Учитель. Вот мы и прошли путь первооткрывателей:
— заметили «схожесть» и общность различных задач;
— формализовали эту «общность», то есть построили математическую модель;
— ввели новое понятие и обозначение для него;
— дали истолкование этой модели на разных языках.
Чем мы не Лейбницы и не Ньютоны?! Только есть одно маленькое отличие нас от них: я положил перед вами эти задачи рядом и нацелил на поиск общего в них, а ученые сами эти задачи увидели, положили их рядом и нашли их единообразное решение! Мимо этих задач проходили многие и, возможно, даже их решали, но не увидели того, что увидели Ньютон и Лейбниц. Как здесь не сказать, что смотрят все, а видят немногие! В этом и проявляется гениальность первооткрывателей.
И я приглашаю вас вглядываться в то, что вы изучаете, в то, что вас окружает. На этом пути вас ждут удивительные открытия. Пусть и не столь значимые открытия! А это всегда — торжество человеческого духа!